Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Teil I

Grundlagen

Teil II

Die Gaußsche konforme Abbildung des Erdellipsoids in die Ebene

Kapitel 1

Die Gauß-Krügersche Abbildung

1.1 Zur Geschichte der Gauß-Krüger-Koordinaten

Im Jahre 1816 erhielt Heinrich Christian Schumacher (1780 - 1850), Leiter der Kopenhagener Sternwarte, vom dänischen König den Auftrag, eine Breiten- und Längengradmessung durchzuführen, die sich von Skagen bis Lauenburg und von Kopenhagen bis zur Westküste Jütlands erstrecken sollte (vgl. [?]).

Abbildung 1.1: Heinrich Christian Schumacher

Schumacher regte an, die dänische Breitengradmessung durch Hannover fortzusetzen. Dies fand auch bei Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) Anklang, so genehmigte der König von Hannover 1820, die Fortsetzung der dänischen Gradmessung durch sein Königreich. Gauß, seinerzeit Leiter der Sternwarte von Hannover, vermaß von 1821 bis 1823 das Hamburger Umland. Von 1828 - 1844 vermaß Gauß für diese Landvermessungen nötige Dreiecksketten.

Zur Übertragung der Punkte auf dem Erdellipsoids in die 2-dimensionale Ebene bediente sich Gauß konformer Abbildungen. Die Aufgabe, eine Fläche so auf einer anderen abzubilden, daß das Bild dem Original in den kleinsten Teilen ähnlich werde, erwähnte Gauß das erste Mal in einen Brief an Schumacher vom 5. Juli 1816 (vgl. [?]).
Daraufhin schlug Schumacher der Kopenhagener Sozietät der Wissenschaften dieses Problem als Thema einer Preisfrage vor, die Aufgabenstellung wurde als Preisarbeit ausgeschrieben. Gauß reichte 1822 eine Lösung ein, die dann 1825 zum ersten Mal in den von Schumacher herausgegebenen astronomischen Abhandlungen veröffentlicht wurde.

Wie aus Band IX, Seite 104ff des Nachlasses von Carl Friedrich Gauß hervorgeht, hat er in der Zeit von 1816 bis 1820 verschiedene konforme Abbildungen des Erdellipsoids für rein geodätische Zwecke in Betracht gezogen, ausführlicher als in der Preisschrift mitgeteilt wurde. Seine Erkenntnisse nutze er auch in der Hannoverschen Landvermessung. Da Gauß nie eine theoretische Begründung seiner Studien verfaßt hatte, drohten seine Erkenntnisse nach seinem Tode in Vergessenheit zu geraten. Diesen Verlust verhinderte Oskar Schreiber (1829

- 1905) durch seine 1866 erschienene Veröffentlichung „Theorie der Projektionsmethode der hannoverschen Landesvermessung". In diesem Werk war eine Weiterentwicklung der Gaußschen Formeln enthalten (vgl. [?]).

Abbildung 1.2: Carl Friedrich Gauß

Mit der Gründung des „Zentraldirektoriums der Vermessungen im preußischen Staat" im Jahre 1870 erhielten die zivilen Behörden Preußens erstmals Einfluß auf die Geodäsie, für welche vorher ausschließlich das Militär verantwortlich war. Als das Zentraldirektorium zwei Jahre später eine Neutriangulation des preußischen Gebietes beschloß, übernahm Preußen als Vertragsarbeit die Landestriangulation für weitere 20 deutsche Staaten. Die trigonometrischen Arbeiten erfolgten unter der Leitung Oskar Schreibers, der die westlichen Netzteile, den „Schreiberschen Block", anlegte. Als Zentralpunkt dieses Netzes wurde der Trigonometrische Punkt Rauenberg mit dem Azimut zur Berliner Marienkirche festgehalten, dessen geographische Koordinaten von der Berliner Sternwarte ermittelt wurden. Als Bezugsfläche diente der Bessel-Ellipsoid (siehe Tabelle **??**). Die Koordinaten wurden für ganz Preußen nach der Schreiberschen konformen Doppelprojektion konform in die Ebene abgebildet (vgl. [?]).

Am Ende des 19 Jahrhunderts fand eine Diskussion um ein angemessenes Projektionsverfahren statt. Sie begann als rein theoretische Frage und wurde dann Gegenstand höchst praktischer Auseinandersetzungen, welche einen großen Anteil an der Verbreitung des Gaußschen Gedankengutes hatte Johannes Heinrich Louis Krüger (1857 - 1923). Angeregt durch die Sichtung und Bearbeitung des Gaußschen geodätischen Nachlasses - wobei Krüger zahlreiche Notizen fand, die Schreiber unbekannt waren - entstand Krügers umfassendes, ausführliches Werk über die Gaußsche Projektion. Es erschien unter dem Titel „Konforme Abbildung des Erdellipsoids in die Ebene" im Jahre 1912. Seitdem heißen die Gaußschen Koordinaten der Hannoverschen Landesvermessung „Gauß-Krüger Koordinaten".

1.2 Entwicklung von Mercator zu Gauß-Krüger

Für die Landvermessung wurde ein neues Projektionsverfahren benötigt, da die vorhandenen zu viele Nachteile hatten. Ein Beispiel dafür ist die bereits diskutierte, nicht längentreue Mercatorprojektion. Es ist möglich, ihre Idee aufzugreifen und zu verbessern, indem man den Projektionszylinder so legt, daß er die Erde nicht im Äquator sondern entlang eines Längenkreises berührt. Der Längenkreis muß dabei so gewählt werden, daß er sich in unmittelbarer Nähe des zu vermessenen Gebietes befindet. Dieses modifizierte Verfahren heißt ***transversale Mercatorprojektion*** und liefert lokal eine geringere Längenverzerrung, insbesondere mit wachsender Entfernung vom Äquator. Es stellt aber noch keine wirkliche Verbesserung dar.
Gauß ging deshalb einen anderen Weg: Ausgehend von einer Reihe geographischer Anforderungen an eine Projektion, versuchte er nicht ein vorhandenes Verfahren zu verbessern. Seine

Arbeit bestand darin, eine Abbildungsvorschrift zu bestimmen, welche seine Anforderungen erfüllte.

1.3 Anforderungen an die Projektion

Gauß suchte nach einer Abbildung $\mathcal{G}$, die einem Punkt mit geographischer Länge λ und geographischer Breite φ auf der Erdoberfläche die kartesischen Koordinaten im $\mathbb{R}^2$ so zuordnet, daß gilt:

1. $\mathcal{G}$ ist konform,
2. Äquator und Nullmeridian entsprechen den Achsen im $\mathbb{R}^2$, insbesondere $\mathcal{G}(0,0) = 0$,
3. die Abbildung ist auf dem Hauptmeridian $\lambda_0 = 0$ längentreu.

Durch diese Forderungen ist die Abbildungsvorschrift eindeutig bestimmt und kann durch Anwendung der theoretischen Überlegungen aus den Kapitel **??** und **??** berechnet werden.

Im folgenden sei der Erdellipsoid konkret angegeben als

$$S := \left\{ \left(\frac{a\cos\varphi\cos\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \frac{a\cos\varphi\sin\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \right) \in \mathbb{R}^3 \mid -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, -\pi < \lambda < \pi \right\},$$

wobei e die erste Exzentrizität ist und $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $a > b$ die beiden Halbachsen.

Die Konstruktion der Gauß-Krüger-Abbildung erfolgt in zwei Schritten. Zuerst wird eine Abbildung $k : S \to \mathbb{R}^2$ konstruiert, die die ersten beiden Bedingungen erfüllt. Eine weitere Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sorgt dann dafür, daß die Hintereinanderausführung $\mathcal{G} = g \circ k$ alle drei Bedingungen erfüllt.

1.4 Berechnung der Gaußschen Koeffizienten

Aus **??** ist die Parametrisierung des Ellipsoids bezüglich der geographischen Breite und Länge $\psi_{(\lambda,\varphi)}$ bekannt. An dieser Stelle werden die Gaußschen Koeffizienten von $\psi_{(\lambda,\varphi)}$ berechnet, die später in dem Beweis, daß die Abbildung $k : S \to \mathbb{R}^2$ konform ist eingehen.

$$\begin{aligned}
E(\lambda,\varphi) &= \left\langle \tfrac{\partial\psi_{(\lambda,\varphi)}}{\partial\lambda}(\lambda,\varphi), \tfrac{\partial\psi_{(\lambda,\varphi)}}{\partial\lambda}(\lambda,\varphi) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{-a\cos\varphi\sin\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \\ \frac{a\cos\varphi\cos\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-a\cos\varphi\sin\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \\ \frac{a\cos\varphi\cos\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \tfrac{a^2\cos^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi} \\
F(\lambda,\varphi) &= \left\langle \tfrac{\partial\psi_{(\lambda,\varphi)}}{\partial\lambda}(\lambda,\varphi), \tfrac{\partial\psi_{(\lambda,\varphi)}}{\partial\varphi}(\lambda,\varphi) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{-a\cos\varphi\sin\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \\ \frac{a\cos\varphi\cos\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{a(e^2-1)\sin\varphi\cos\lambda}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{a(e^2-1)\sin\varphi\sin\lambda}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{b^2\cos\varphi}{a(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \tfrac{-a^2(e^2-1)\cos\varphi\sin\varphi\cos\lambda\sin\lambda}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2} + \tfrac{a^2(e^2-1)\cos\varphi\sin\varphi\cos\lambda\sin\lambda}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2} = 0
\end{aligned}$$

und

$$G(\lambda,\varphi) = \left\langle \frac{\partial\psi_{(\lambda,\varphi)}}{\partial\varphi}(\lambda,\varphi), \frac{\partial\psi_{(\lambda,\varphi)}}{\partial\varphi}(\lambda,\varphi) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{a(e^2-1)\sin\varphi\cos\lambda}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{a(e^2-1)\sin\varphi\sin\lambda}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{b^2\cos\varphi}{a(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{a(e^2-1)\sin\varphi\cos\lambda}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{a(e^2-1)\sin\varphi\sin\lambda}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{b^2\cos\varphi}{a(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \frac{a^2\cdot(e^2-1)^2\sin^2\varphi\cos^2\lambda}{(1-e^2\sin^2\varphi)^3} + \frac{a^2\cdot(e^2-1)^2\sin^2\varphi\sin^2\lambda}{(1-e^2\sin^2\varphi)^3} + \frac{b^4\cos^2\varphi}{a^2(1-e^2\sin^2\varphi)^3} = \frac{b^4}{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}.$$

In der Literatur sind die folgenden Abkürzungen üblich

$$R_N(\varphi) := \frac{a}{\sqrt{1-e^2\cdot\sin^2\varphi}}, \tag{1.1}$$

$$R_M(\varphi) := \frac{b^2}{a(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}. \tag{1.2}$$

Es wird $R_N(\varphi)$ dabei als ***Querkrümmungsradius*** und $R_M(\varphi)$ als ***Meridiankrümmungsradius*** bezeichnet. Es ist $R_N(\varphi)$ auch schon bekannt aus (**??**).

$$E(\lambda,\varphi) = R_N(\varphi)^2\cos^2\varphi \tag{1.3}$$

$$F(\lambda,\varphi) = 0 \tag{1.4}$$

$$G(\lambda,\varphi) = R_M(\varphi)^2. \tag{1.5}$$

1.5 Satz

Sei $q : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Abbildung mit

$$q'(\varphi) = \frac{R_M(\varphi)}{R_N(\varphi)\cos\varphi} \tag{1.6}$$

und $q(0) = 0$. Dann ist

$$k : S \to \mathbb{R}^2, \quad (\lambda,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda \\ q(\varphi) \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

eine konforme Abbildung.

Beweis:

Für die Gaußschen Koeffizienten von k ergibt sich

$$\tilde{E}(\lambda,\varphi) = 1$$
$$\tilde{F}(\lambda,\varphi) = 0$$
$$\tilde{G}(\lambda,\varphi) = q'(\varphi)^2.$$

Die Abbildung $p : S \to \mathbb{R}_+$, $(\lambda,\varphi) \mapsto R_N(\varphi)^2\cos^2\varphi$, erfüllt dann mit $x = (\lambda,\varphi)$

$$p(x)\begin{pmatrix} \tilde{E}(x) & \tilde{F}(x) \\ \tilde{F}(x) & \tilde{G}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(x) & F(x) \\ F(x) & G(x) \end{pmatrix}.$$

Folglich ist k nach Bemerkung **??** 2. konform. □

1.5.1 Bemerkungen

1. Es ist in der Literatur üblich, $q(\varphi)$ als ***isometrische Breite*** zu bezeichnen. Zu deren Berechnung bietet es sich an, $q(\varphi)$ über Integration zu bestimmen. Es ist

$$
\begin{aligned}
q(\varphi) &= \int_0^{\varphi} \frac{R_M(t)}{R_N(t)\cos t} dt \\
&= \int_0^{\varphi} \frac{\frac{b^2}{a(1-e^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{a\cos t}{\sqrt{1-e^2\sin^2 t}}} dt \\
&= \int_0^{\varphi} \frac{(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 t)\cos t} dt \\
&= \int_0^{\varphi} \frac{(1-e^2)\cos t}{(1-e^2\sin^2 t)(1-\sin^2 t)} dt \\
&= \int_0^{\sin\varphi} \frac{(1-e^2)}{(1-e^2 s^2)(1-s^2)} ds && \text{Substitution} \\
&= \int_0^{\sin\varphi} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s} - \frac{e^2}{1+es} - \frac{e^2}{1-es}\right) ds && \text{Partialbruchz.} \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(\ln(1+s) - \ln(1-s) - e\ln(1+es) + e\ln(1-es)\right)\right]_0^{\sin\varphi} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right) - \frac{e}{2}\ln\left(\frac{1+e\sin\varphi}{1-e\sin\varphi}\right) \\
&= \operatorname{Artanh}(\sin\varphi) - e\operatorname{Artanh}(e\sin\varphi).
\end{aligned}
$$

   Dies ist wohldefiniert, da $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist und somit $|\sin\varphi| < 1$ und $|e\sin\varphi| < 1$ ist.

2. Ist die große Halbachse a gleich der kleinen Halbachse b, so ist $e = 0$ und es ergibt sich für k die Mercatorabbildung aus **??**.

Die Abbildung k ist nicht noch die gesuchte Gauß-Krüger-Abbildung $\mathcal{G}$, da sie nicht längentreu auf dem Hauptmeridian $\lambda_0 = 0$ ist. Somit muß noch die anfangs besprochene Abbildung g konstruiert werden.

1.6 Generalvoraussetzung

Sei $q(\varphi)$ die isometrische Breite und $k : S \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung wie in Satz 1.5 definiert.

1.7 Konstruktion der Abbildung g

Um die Konformität nicht zu verlieren, wird $\mathbb{R}^2$ als komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ dargestellt. Also ist $k : S \to \mathbb{C}$, $(\lambda, \varphi) \mapsto q + i\lambda$. Es wird dann eine Abbildung $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gesucht, so daß $\mathcal{G} = g \circ k$ die Abbildungsbedingungen erfüllt. Es kann g als

$$g(q + i\lambda) = g_1(q + i\lambda) + ig_2(q + i\lambda)$$

geschrieben werden, wobei g_1 und g_2 die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (vgl. [**?**]) erfüllen. An g werden die folgenden Bedingungen gestellt, die aus den Anforderungen in 1.3 folgen.

1. $g(q) = g_1(q)$ für jedes $q \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, insbesondere gilt nach Satz 1.5 $g(0) = 0$,

2. $g(i\lambda) = ig_2(i\lambda)$ für alle $\lambda \in (-\pi, \pi)$,

3. g ist konform.

Eine weitere Anforderung an g ist, daß die Hintereinanderausführung $\mathcal{G} = g \circ k$ den Hauptmeridian $\lambda_0 = 0$ längentreu abbildet (siehe dazu 1.9).

1.7.1 Satz (Verallgemeinerter binomischer Lehrsatz)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $|\xi| < 1$

$$(1-\xi)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{\alpha}{n} \xi^n. \tag{1.8}$$

Dabei ist

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

1.8 Bestimmung der Meridianbogenlänge

Die Parametrisierung $\chi_0^\varphi : \mathbb{R} \to S$, $t \mapsto \psi_{(\lambda,\varphi)}(0,t)$ durchläuft den Hauptmeridian $\lambda_0 = 0$ und hat zwischen dem Äquator und der Breite φ die Länge

$$\begin{aligned} L(\chi_0^\varphi) &= \int_0^\varphi \left| \frac{d\chi_0^\varphi(t)}{dt} \right| dt &&= \int_0^\varphi |\frac{d\psi_{(\lambda,\varphi)}}{dt}(0,t)|dt \\ &= \int_0^\varphi |\frac{\partial\psi_{(\lambda,\varphi)}}{\partial\varphi}(0,t)|dt &&= \int_0^\varphi R_M(t)dt. \end{aligned}$$

Also ist

$$L(\chi_0^\varphi) = \int_0^\varphi R_M(t)dt. \tag{1.10}$$

Dieses elliptische Integral ist nicht geschlossen lösbar wenn die große Halbachse a ungleich der kleinen Halbachse b ist. Es ergibt sich nach Definition von $R_M(t)$

$$L(\chi_0^\varphi) = a\int_0^\varphi (1-e^2)\left(1-e^2\sin^2 t\right)^{-\frac{3}{2}} dt. \tag{1.11}$$

Zur Lösung des Integrals bietet sich eine Entwicklung des Integranden mit Hilfe des verallgemeinerten binomischen Lehrsatzes 1.7.1 an, wobei $\xi := e\sin t < 1$ gesetzt wird.

$$(1-e^2\sin^2 t)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{3}{2}}{n}(-1)^n e^{2n}\sin^{2n} t \tag{1.12}$$

Dabei ist nach Gleichung (1.9)

$$\binom{-\frac{3}{2}}{n} = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\ldots\left(-n-\frac{1}{2}\right)}{n!} \tag{1.13}$$

$$= (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1}\frac{2i+3}{2i+2}. \tag{1.14}$$

Weiter gilt für gerade Potenzen des Sinus nach der Formel von Moivre (vgl. [**?**])

$$\sin^n(t) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n}{k}\cos((n-2k)t). \tag{1.15}$$

Damit wird (1.12) zu

$$\begin{aligned}
&(1-e^2\sin^2 t)^{-\frac{3}{2}}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left((-1)^n\prod_{i=0}^{n-1}\tfrac{2i+3}{2i+2}\right)(-1)^n e^{2n}\frac{(-1)^{\frac{2n}{2}}}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\cos((2n-2k)t)\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left((-1)^n\prod_{i=0}^{n-1}\tfrac{2i+3}{2i+2}\right)e^{2n}\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\cos((2n-2k)t)\right)
\end{aligned}$$

Das die Reihe konvergiert wird im folgenden gezeigt. Es gilt für die Koeffizienten von e^{2n}:

$$\begin{aligned}
&\left|\left((-1)^n\prod_{i=0}^{n-1}\tfrac{2i+3}{2i+2}\right)(-1)^n\frac{(-1)^{\frac{2n}{2}}}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\cos((2n-2k)t)\right|\\
&\le \left(\prod_{i=0}^{n-1}\tfrac{2i+3}{2i+2}\right)\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}1^k1^{2n-k}\\
&= \left(\prod_{i=0}^{n-1}\tfrac{2i+3}{2i+2}\right)\frac{2^{2n}}{2^{2n}}\\
&= \prod_{i=0}^{n-1}\tfrac{2i+3}{2i+2}\\
&\le \left(\tfrac{3}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

Damit läßt sich die obige Reihe schreiben als $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_ne^{2n}$ mit $|a_n|\le\left(\frac{3}{2}\right)^n$. Das Restglied dieser Reihe ist

$$R(N)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{2n}-\sum_{n=0}^{N}a_ne^{2n} \tag{1.16}$$

und erfüllt

$$\begin{aligned}
|R(N)| &= \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_ne^{2n}\right|\\
&\le \sum_{n=N+1}^{\infty}\left|a_ne^{2n}\right|\\
&\le \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\tfrac{3}{2}\right)^n e^{2n}\\
&= \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\tfrac{3e^2}{2}\right)^n\\
&= \left(\tfrac{3e^2}{2}\right)^{N+1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{3e^2}{2}\right)^n\\
&= \left(\tfrac{3e^2}{2}\right)^{N+1}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{3e^2}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Für die zwölfte Potenz von e ergibt sich dann ein Restglied von $R(12)\le 1,1\cdot 10^{-26}$. Somit reicht es, die Reihe nur bis zur zehnten Potenz von e anzugeben:

$$\begin{aligned}
&(1-e^2)(1-e^2\sin^2 t)^{-\frac{3}{2}}\\
&= (1-e^2)(1+\tfrac{3}{2}e^2(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos(2t))+\tfrac{15}{8}e^4(\tfrac{3}{8}-\tfrac{1}{2}\cos(2t)+\tfrac{1}{8}\cos(4t))\\
&\quad+\tfrac{35}{16}e^6(\tfrac{5}{16}-\tfrac{15}{32}\cos(2t)+\tfrac{3}{16}\cos(4t)-\tfrac{1}{32}\cos(6t))\\
&\quad+\tfrac{315}{128}e^8(\tfrac{35}{128}-\tfrac{7}{16}\cos(2t)+\tfrac{7}{32}\cos(4t)-\tfrac{1}{16}\cos(6t)+\tfrac{1}{128}\cos(8t))\\
&\quad+\tfrac{693}{256}e^{10}(\tfrac{63}{256}-\tfrac{105}{256}\cos(2t)+\tfrac{15}{64}\cos(4t)-\tfrac{45}{512}\cos(6t)+\tfrac{5}{256}\cos(8t)-\tfrac{1}{512}\cos(10t)))\\
&\quad+R(12)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & (1 - \tfrac{1}{4}e^2 - \tfrac{3}{64}e^4 - \tfrac{5}{256}e^6 - \tfrac{175}{16384}e^8 - \tfrac{441}{65536}e^{10}) \\
& - \cos(2t)(\tfrac{3}{4}e^2 + \tfrac{3}{16}e^4 + \tfrac{45}{512}e^6 + \tfrac{105}{2048}e^8 + \tfrac{2205}{65536}e^{10}) \\
& + \cos(4t)(\tfrac{15}{64}e^4 + \tfrac{45}{256}e^6 + \tfrac{626}{4096}e^8 + \tfrac{1575}{16384}e^{10}) - \cos(6t)(\tfrac{35}{512}e^6 + \tfrac{175}{2048}e^8 + \tfrac{11025}{131072}e^{10}) \\
& + \cos(8t)(\tfrac{315}{16384}e^8 + \tfrac{2205}{65536}e^{10}) - \cos(10t)(\tfrac{693}{131072}e^{10}) + R(12).
\end{aligned}
$$

Zur besseren Übersicht werden die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$
\begin{aligned}
l &:= 1 - \tfrac{1}{4}e^2 - \tfrac{3}{64}e^4 - \tfrac{5}{256}e^6 - \tfrac{175}{16384}e^8 - \tfrac{441}{65536}e^{10} \\
m &:= \tfrac{3}{4}e^2 + \tfrac{3}{16}e^4 + \tfrac{45}{512}e^6 + \tfrac{105}{2048}e^8 + \tfrac{2205}{65536}e^{10} \\
n &:= \tfrac{15}{64}e^4 + \tfrac{45}{256}e^6 + \tfrac{626}{4096}e^8 + \tfrac{1575}{16384}e^{10} \\
o &:= \tfrac{35}{512}e^6 + \tfrac{175}{2048}e^8 + \tfrac{11025}{131072}e^{10} \\
p &:= \tfrac{315}{16384}e^8 + \tfrac{2205}{65536}e^{10} \\
r &:= \tfrac{693}{131072}e^{10}.
\end{aligned}
$$

Einsetzten dieser Ergebnisse in (1.11) liefert den Meridianbogen $L(\chi_0^\varphi)$ zwischen den Breiten 0 und φ

$$
\begin{aligned}
L(\chi_0^\varphi) &= a\int_0^\varphi (l - m\cos(2t) + n\cos(4t) - o\cos(6t) + p\cos(8t) - r\cos(10t))dt + R(12) \\
&= a(l\varphi - \frac{1}{2}m\sin(2\varphi) + \frac{1}{4}n\sin(4\varphi) - \frac{1}{6}o\sin(6\varphi) + \frac{1}{8}p\sin(8\varphi) \qquad (1.17) \\
&\quad - \frac{1}{10}r\sin(10\varphi_2)) + R(12).
\end{aligned}
$$

1.8.1 Beispiel

Die Reihe (1.17) konvergiert sehr schnell, so daß es ausreicht, nur die Glieder bis zur zehnten Potenz von e zu bestimmen. Am Beispiel des Meridianbogens zwischen dem Äquator und dem 52. Breitengrad soll dies gezeigt werden.
Die zahlenmäßige Auswertung mit dem Besselschen Ellipsoid (siehe Tabelle **??**) ergibt dann

$$
\begin{aligned}
l &= 9,983 \cdot 10^{-1} \\
m &= 5,014 \cdot 10^{-3} \\
n &= 1,049 \cdot 10^{-5} \\
o &= 2,050 \cdot 10^{-8} \\
p &= 3,860 \cdot 10^{-11} \\
r &= 7,003 \cdot 10^{-14}
\end{aligned}
$$

Folglich hat χ_0^φ zwischen dem Äquator und $\varphi = 52°$ die Länge

$$L(\chi_0^\varphi) = 5762750,674\,\mathrm{m}\,.$$

[**?**] gibt $L(\chi_0^\varphi)$ bis zur sechsten Potenz von e an und erhält dabei für $L(\chi_0^\varphi)$ einen Wert von 5762750,667 m.

1.9 Bestimmung der Ableitungen von g

Es wird im folgenden die Existenz einer konformen Abbildung $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ angenommen, die die Bedingungen aus 1.7 erfüllt. Die Ableitungen von g lassen sich aus der Länge des Meridianbogens berechnen, ohne g explizit zu kennen. Für die Länge der Kurve χ_0^φ aus 1.8 gilt für $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, wegen der Forderung, daß $g \circ k$ längentreu ist

$$\begin{aligned} L(\chi_0^\varphi) &= g(q+i0) - g(0+i0) \\ &= g_1(q(\varphi+i0)) + ig_2(q+i0) - 0 \\ &= g_1(q) \\ &= g(q) \end{aligned}$$

und somit ist nah Gleichung (1.10)

$$\int_0^\varphi R_M(t)dt \quad = \quad g(q). \tag{1.18}$$

Dies ist auch für Breiten unterhalb des Äquators definiert. Nach der Kettenregel (**??**) gilt dann $R_M(\varphi) = g'(q) \cdot q'(\varphi)$. Die erste Ableitung von $g(q)$ ist dann mit Gleichung (1.6)

$$\begin{aligned} g'(q) &= R_M(\varphi) \cdot \tfrac{R_N(\varphi)\cos\varphi}{R_M(\varphi)} \\ &= R_N(\varphi)\cos\varphi \\ &= \tfrac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}. \end{aligned}$$

Die höheren Ableitungen ergeben sich ebenfalls durch Anwendung der Kettenregel zu

$$\begin{aligned} g^{(2)}(q) &= \tfrac{(e^2-1)a\sin\varphi}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \tfrac{R_N(\varphi)}{R_M(\varphi)}\cos\varphi \\ &= \tfrac{(e^2-1)a\sin\varphi}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \tfrac{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi}{1-e^2} \\ &= \tfrac{-a\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \\ &= -\tfrac{1}{2}R_N(\varphi)\sin(2\varphi). \end{aligned}$$

Die weiteren Ableitungen haben die folgende Form, mit $\delta^2 := \frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi$ unter Vernachlässigung von Gliedern sechster und höherer Potenz

$$\begin{aligned} g^{(3)}(q) &= \left(\tfrac{-a\sin(2\varphi)e^2\sin\varphi\cos\varphi}{2(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} - \tfrac{a\cos(2\varphi)}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\right) \cdot \tfrac{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi}{1-e^2} \\ &= \left(\tfrac{-ae^2\cos^2\sin^2 - a\cos(2\varphi)+ae^2\cos(2\varphi)\sin^2\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\right) \cdot \tfrac{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi}{1-e^2} \\ &= \tfrac{R_N(\varphi)\cos\varphi}{1-e^2}\left(-e^2\sin^2\varphi - \cos^2\varphi + \sin^2\varphi + e^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right) \\ &= \tfrac{R_N(\varphi)\cos\varphi}{1-e^2}\left((1-e^2)\sin^2\varphi - \cos^2\varphi + e^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right) \\ &= \tfrac{R_N(\varphi)\cos^3\varphi}{1-e^2}\left((1-e^2)\tfrac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} - 1 + e^2\sin^2\right) \\ &= \tfrac{R_N(\varphi)\cos^3\varphi}{1-e^2}\left((1-e^2) + e^2\cos^2\varphi - (1-e^2)\tan^2\varphi\right) \\ &= -R_N(\varphi)\cos^3\varphi\left(1 + \tfrac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi - \tan^2\varphi\right) \\ &= -R_N(\varphi)\cos^3\varphi(1+\delta^2-\tan^2\varphi), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g^{(4)}(q) &= \left(-\frac{a\cos^4\varphi\left(1+\frac{e^2\cos^2\varphi}{1-e^2}-\tan^2\varphi\right)e^2\sin\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3a\cos^2\varphi\sin\varphi\left(1+\frac{e^2\cos^2\varphi}{1-e^2}-\tan^2\varphi\right)}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \right.\\
&\quad \left. -\frac{a\cos^3\varphi\left(-\frac{2e^2\cos\varphi\sin\varphi}{1-e^2}-2\tan\varphi(1+\tan^2\varphi)\right)}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \right) \cdot \frac{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi}{1-e^2}\\
&= \frac{a\cos^3\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi(1-e^2)}} \cdot \left(-e^2\cos^2\varphi\sin\varphi\left(1+\frac{e^2\cos^2\varphi}{1-e^2}-\tan^2\varphi\right) \right.\\
&\quad + \left(3\sin\varphi\left(1+\frac{e^2\cos^2\varphi}{1-e^2}-\tan^2\varphi\right)(1-e^2\sin^2\varphi)\right)\\
&\quad \left. -\cos\varphi\left(-\frac{2e^2\cos\varphi\sin\varphi}{1-e^2}-2\tan\varphi(1+\tan^2\varphi)\right)(1-e^2\sin^2\varphi)\right)\\
&= \frac{R_N(\varphi)\cos^3\varphi\sin\varphi}{1-e^2} \cdot \big(-e^2\cos^2\varphi(1+\delta^2-\tan^2\varphi)\\
&\quad +3(1-e^2\sin^2\varphi)(1+\delta^2-\tan^2\varphi)\\
&\quad -(1-e^2\sin^2\varphi)(-2\delta^2-2-2\tan^2\varphi)\big)\\
&= \frac{R_N(\varphi)\cos^3\varphi\sin\varphi}{1-e^2} \cdot \big(-e^2\cos^2\varphi(1+\delta^2-\tan^2\varphi)\\
&\quad +3(1-e^2+e^2\cos^2\varphi)(1+\delta^2-\tan^2\varphi)\\
&\quad +2(1-e^2+e^2\cos^2\varphi)(1+\delta^2+\tan^2\varphi)\big)\\
&= \frac{R_N(\varphi)\cos^3\varphi\sin\varphi}{1-e^2} \cdot \big((1-e^2+e^2\cos^2\varphi)(5+5\delta^2-\tan^2\varphi)-2e^2\cos^2\varphi\delta^2+e^2\big)\\
&= \frac{R_N(\varphi)\cos^3\varphi\sin\varphi}{1-e^2} \cdot \big(5(1-e^2)+5(1-e^2)\delta^2-(1-e^2)\tan^2\varphi\\
&\quad +4e^2\cos^2\varphi+4e^2\cos^2\varphi\delta^2\big)\\
&= R_N(\varphi)\cos^3\varphi\sin\varphi(5+9\delta^2+4\delta^4-\tan^2\varphi).
\end{aligned}
$$

Die weiteren Ableitungen lauten:

$$
\begin{aligned}
g^{(5)}(q) &\approx R_N(\varphi)\cos^5\varphi(5+14\delta^2+13\delta^4-\tan^2\varphi(18+58\delta^2+64\delta^4)+\tan^4\varphi)\\
g^{(6)}(q) &\approx -R_N(\varphi)\cos^5\varphi\sin\varphi(61+270\delta^2+445\delta^4-\tan^2\varphi(58+330\delta^2+680\delta^4)+\tan^4\varphi)
\end{aligned}
$$

Es sind dabei alle Ableitungen $g^{(k)}(q) \in \mathbb{R}$, da $g : \mathbb{C} \supseteq R \to \mathbb{R}$ und g konform nach der Konstruktion 1.7 von g.

1.10 Darstellung von g

Es kann $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ im Punkte q als Taylorreihe entwickelt werden:

$$
\begin{aligned}
g(q+i\lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} g^{(k)}(q)((q+i\lambda)-q)^k \qquad (1.19)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^k}{k!} g^{(k)}(q)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} g^{(2k)}(q) + i\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} g^{(2k+1)}(q)\\
&= g_1(q+i\lambda) + i g_2(q+i\lambda).
\end{aligned}
$$

Diese g_1 und g_2 sind die gesuchten Gauß-Krüger-Koordinaten und werden üblicherweise mit $X := g_1$ und $Y := g_2$ bezeichnet. Einsetzen der Ableitungen aus 1.9 liefert die Koordinaten (X, Y) zur geographischen Länge und Breite (λ, φ).

1.10.1 Satz

Für die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gilt

1. $g(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$,
2. $g(i\mathbb{R}) \subseteq i\mathbb{R}$,

Beweis:

Zu 1.: Unter der Annahme der Konvergenz von Reihe (1.19) und mit $g^{(k)}(q) \in \mathbb{R}$ gilt die Behauptung.

Zu 2.: Aus $R_M(\varphi) = R_M(-\varphi)$ folgt

$$\begin{aligned} g(q(\varphi)) &= \int_0^{\varphi} R_M(t)dt \\ &= -\int_0^{-\varphi} R_M(t)dt \\ &= -g(q(\varphi)) \\ &\overset{1.5.11}{=} -g(-q(\varphi)) \end{aligned}$$

Somit gilt für $q \in \mathbb{R}$: $g(q) = -g(-q)$. Folglich gilt für alle $p \in \mathbb{R}$ $g(p) + g(-p) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}$ und damit nach dem Identitätssatz (vgl. [**?**]) innerhalb des Konvergenzradius. Es ist dann $0 = \frac{d^n}{dp^n}\Big|_{p=0} (g(p) + g(-p)) = g^{(n)}(0) + (-1)^n g^{(n)}(-0)$.

Damit folgt die Behauptung.

□

1.10.2 Bemerkung

Um die Gauß-Krüger-Koordinaten für einen beliebigen Hauptmeridian λ_0 ungleich Null zu berechnen wird λ in (1.19) durch die Differenz $\lambda - \lambda_0$ ersetzt.

1.11 Zusammenfassung

Somit ist die Gauß-Krüger-Abbildung $\mathcal{G}$ konstruiert als Hintereinanderausführung des konformen Diffeomorphismus $k : S \to \mathbb{C}$ (siehe 1.5) und der Abbildung $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (siehe 1.10). Es kann damit ein Ausschnitt der Erde konform und längentreu in die Ebene abgebildet werden.

Namen- und Sachverzeichnis