

Zusammenfassung der Analytischen Geometrie

1 Verschiedenes zu Vektoren

Die folgenden Definitionen werden Ihnen immer wieder in der Analytischen Geometrie begegnen. Deshalb hier einmal kurz zusammen gefasst:

1.1 Betrag eines Vektors

Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ hat den **Betrag** (die Länge) $|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

1.2 Skalarprodukt

\vec{a} und \vec{b} seien zwei Vektoren und γ der Winkel zwischen diesen Vektoren. Dann bezeichnet man

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma \quad (1)$$

als das **Skalarprodukt** von \vec{a} und \vec{b} . Das Skalarprodukt berechnet sich wie folgt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \quad (2)$$

1.3 Die Kosinusformel

\vec{a} und \vec{b} seien vom Nullvektor verschiedene Vektoren und γ sei der Winkel zwischen ihnen. Dann gilt:

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (3)$$

1.4 Der Abstand zweier Punkte

Der Abstand der Punkte $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ ist gleich dem Betrag des Vektors \overrightarrow{AB} . Es ist also:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \quad (4)$$

2 Geraden und Ebenen

2.1 Die Gerade ist durch Punkt und Richtungsvektor festgelegt

Eine Gerade g kann festgelegt werden durch den Aufpunkt \vec{a} und einem Richtungsvektor \vec{u} :

$$g : \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Bitte wenden...



Zusammenfassung der Analytischen Geometrie

2.2 Ebenengleichungen

- (a) **Vektorielle Parametergleichung einer Ebene** Eine Ebene E kann festgelegt werden durch den Aufpunkt \vec{a} und zwei Richtungsvektoren \vec{u} und \vec{v} .

$$E : \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v} \quad \text{mit } r, s \in \mathbb{R} \quad (6)$$

- (b) **Koordinatengleichung einer Ebene** Eine Ebene kann durch eine **Koordinatengleichung** der Form $ax + by + cz = d$ dargestellt werden, wobei $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ist.

3 Lagebeziehungen

3.1 Lagebeziehungen von Punkten bezüglich einer Geraden im Raum

Gegeben sei der Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und die Gerade $g : \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u}$. Um zu überprüfen, ob P auf g liegt, gehe man wie rechts dargestellt vor.

Koordinate des Punktes in die Geradengleichung einsetzen.	
Ist das lineare Gleichungssystem lösbar?	
ja	nein
P liegt auf g	P liegt nicht auf g
	Abstand von P zu g bestimmen

3.2 Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden

Zwischen zwei Geraden im Raum sind drei charakteristische Lagebeziehungen möglich. Sie können

- (a) parallel liegen (Sonderfall: sie sind identisch);
- (b) sich schneiden;
- (c) windschief sein.

Die Geraden seien gegeben durch $g_1 : \vec{x} = \vec{a}_1 + r\vec{u}_1$ und $g_2 : \vec{x} = \vec{a}_2 + s\vec{u}_2$ mit $r, s \in \mathbb{R}$

Sind die Richtungsvektoren linear abhängig?			
ja		nein	
Dann gilt: g_1 parallel g_2		Dann gilt: g_1 nicht parallel g_2	
Haben g_1 und g_2 einen gemeinsamen Punkt?		Liegt ein Punkt von g_1 auch auf g_2 ?	
ja		nein	
Dann ist $g_1 \equiv g_2$	Dann ist $g_1 \parallel g_2$	Dann ist $g_1 \cap g_2 = \{S\}$	Dann ist $g_1 \cap g_2 = \emptyset$
		g_1 und g_2 schneiden sich im Punkt S	g_1 und g_2 sind windschief



Zusammenfassung der Analytischen Geometrie

3.3 Lagebeziehung zwischen einem Punkt und einer Ebene

Gegeben sei der Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und die Ebene $E : \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$

Koordinate des Punktes in die Ebenengleichung einsetzen.	
Ist das lineare Gleichungssystem lösbar?	
ja	nein
P liegt in E	P liegt nicht in E
	Abstand von P zu E bestimmen

3.4 Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene

Es gibt drei unterschiedliche gegenseitige Lagebeziehungen zwischen einer Geraden und einer Ebene:

- (a) Gerade und Ebene schneiden sich in einem Punkt.
- (b) Die Gerade verläuft parallel zur Ebene.
- (c) Die Gerade liegt ganz in der Ebene.

Gegeben sei die Gerade $g : \vec{x} = \vec{a}_1 + r\vec{u}_1$ und die Ebene $E : \vec{x} = \vec{a}_2 + s\vec{u}_2 + t\vec{v}_2$ mit $r, s, t \in \mathbb{R}$

Sind die Richtungsvektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_2$ linear abhängig?	
ja	nein
g schneidet E	g ist parallel zu E
$g \cap E = \{S\}$	Wir prüfen:
	Ist $\vec{a}_2 - \vec{a}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_2$ linear unabhängig?
	ja
g ist parallel zu E	g liegt in E
$g \cap E = \emptyset$	$g \cap E = g$

3.5 Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen

Es gibt drei unterschiedliche gegenseitige Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen:

- (a) Die Ebenen sind echt parallel.
- (b) Die Ebenen sind identisch.
- (c) Die Ebenen schneiden einander. Sie haben dann eine Schnittgerade gemeinsam.

Gegeben seien die Ebenen $E_1 : \vec{x} = \vec{s}_1 + r\vec{u}_1 + s\vec{v}_1$ und $E_2 : \vec{x} = \vec{s}_2 + t\vec{u}_2 + k\vec{v}_2$ mit $r, s, t, k \in \mathbb{R}$

Sind die Richtungsvektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ linear abhängig?	
ja	nein
E_1 schneidet E_2	E_1 ist parallel zu E_2
$E_1 \cap E_2 = \{g\}$	Wir prüfen:
	Ist $\vec{a}_2 - \vec{a}_1, \vec{u}_1, \vec{v}_1$ linear unabhängig?
	ja
$E_1 \equiv E_2$	$E_1 \neq E_2$

