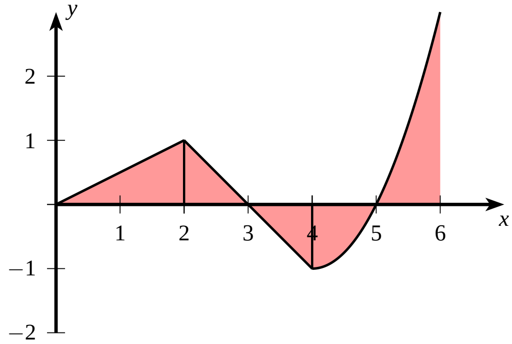
# Integrale abschnittsweise definierter Funktionen

Definition

## Verallgemeinerung des Integralbegriffs:

Die bisherige Definition des Integrals lässt sich auch auf solche Funktionen erweitern, die sich aus monoton wachsenden und monoton fallenden Funktionen zusammensetzen. Sie heißen auch **stückweise monoton**.
Ein Beispiel zeigt die Abbildung rechts. Die Funktion $f$ ist monoton steigend von 0 bis 2, fallend von 2 bis 4 und wieder steigend von 4 bis 6.
Man definiert dann

$$\int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx + \int_4^6 f(x)\,dx$$




In diesem Fall ist $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ -x+3 & \text{für } 2 \le x \le 4 \\ (x-4)^2-1 & \text{für } 4 \le x \le 6 \end{cases}$ .

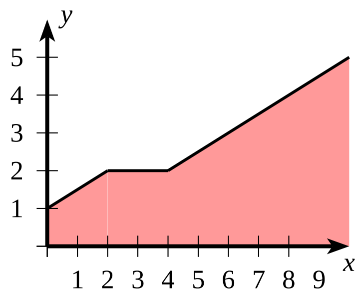
Also ist

$$\begin{aligned}
\int_0^6 f(x)\,dx &= \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx + \int_4^6 f(x)\,dx \\
&= \int_0^2 \tfrac{1}{2}x\,dx + \int_2^4 (-x+3)\,dx + \int_4^6 ((x-4)^2-1)\,dx \\
&= \int_0^2 \tfrac{1}{2}x\,dx + \int_2^4 (-x+3)\,dx + \int_4^6 (x^2-8x+15)\,dx \\
&= \left[\tfrac{1}{4}x^2\right]_0^2 + \left[-\tfrac{1}{2}x^2+3x\right]_2^4 + \left[\tfrac{1}{3}x^3-4x^2+15x\right]_4^6 \\
&= 1-0+4-4+18-17\tfrac{1}{3} \\
&= 1\tfrac{2}{3}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 1:** Die Funktion $f$ ist abschnittsweise definiert. Berechnen Sie das angegebene Integral.

**(a)** $\int_0^{10} f(x)\,dx$ mit $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+1 & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ 2 & \text{für } 2 \le x \le 4 \\ \frac{1}{2}x & \text{für } 4 \le x \end{cases}$

**(b)** $\int_0^{5} f(x)\,dx$ mit $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ x+3 & \text{für } 2 \le x \le 5 \end{cases}$

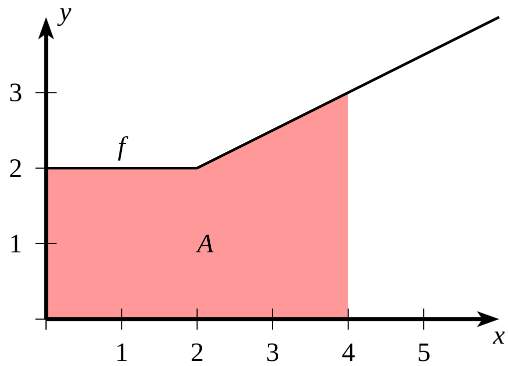



Bitte wenden...



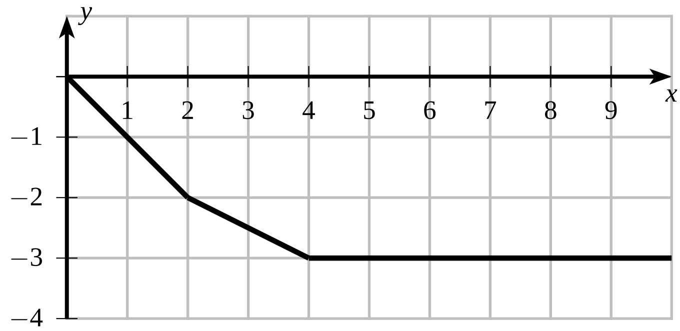
Rendtel, 30.08.2011 - 010_ab_teilweise.tex

**Aufgabe 2:** Berechnen Sie den Flächeninhalt $A$ der farbig unterlegten Fläche elementar. Geben Sie den Inhalt $A$ auch mithilfe bestimmter Integrale an.

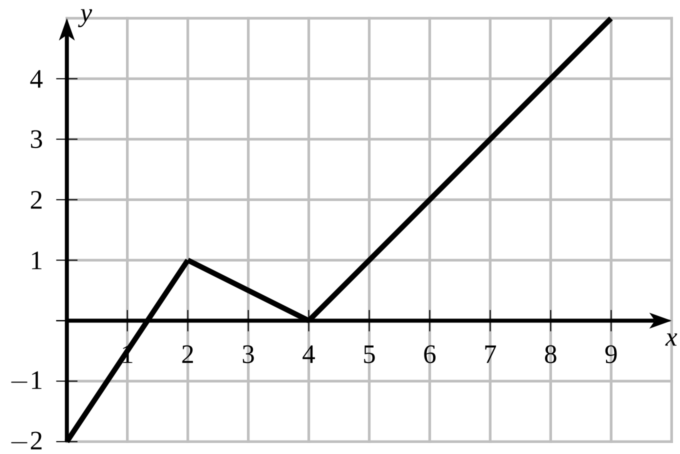



**Aufgabe 3:** Geben Sie die abschnittsweise definierte Funktion $f$ an und berechnen Sie das Integral $\int_0^7 f(x)\,dx$

**(a)**




**(b)**




**Aufgabe 4:** Zeichnen Sie einen Funktionsgraphen, für den gilt:

**(a)** $\int_a^b f(x)\,dx = -A_1 + A_2 + (-A_3)$

**(b)** $\int_a^b f(x)\,dx = A_1 + (-A_2) + A_3 + (-A_4)$