Kosten und Umsatzfunktionen

In den folgenden Abschnitten wenden wir gelegentlich Anwendungen aus der Wirtschaft behandeln. Wir stellen deshalb einige volks- und betriebswirtschaftliche Funktionen vor. Dabei handelt es sich stets um Modelle und Modellrechnungen, da es nicht möglich ist, alle eine Funktion beeinflussenden Bedingungen für einen längeren Zeitraum zu überschauen. Damit kann auch den später gewonnenen Aussagen nur eine begrenzte Aussagekraft zuerkannt werden; eben eine Modellrechnung.
Ein Betrieb stelle von einem Gut (Artikel) in einem Zeitraum die Menge x her, z.B. Apfelsaft, Radiergummis. Wir definieren dann als Produktionsmenge die in der Zeiteinheit produzierte Anzahl eines Gutes, z.B. 500 Liter Apfelsaft in der Stunde, 2000 Radiergummis pro Tag, 50 t Mehl pro Tag oder 67500 Schlafanzüge pro Monat.
x ist in der Regel ganzzahlig. Um jedoch die Mathematik besser anwenden zu können, denken wir uns x aus der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Es ist nämlich durchaus zulässig, 500,25 Liter Apfelsaft je Stunde oder 67500,2 Schlafanzüge pro Monat anzunehmen. Letzteres könnte bedeuten, dass einer nur zu einem Fünftel fertig ist.

Stellt ein Unternehmer ein Gut her, so kostet ihn das natürlich Geld: Wir sprechen von den **Kosten** des Gutes. Da jeder Produktionsmenge x eindeutig Kosten zugeordnet sind, heißt die Zuordnung $x \mapsto K(x)$ **Kostenfunktion**. Als Definitionsmenge betrachten wir das Intervall $[0; x_{max}]$, wobei x_{max} die maximal vom Unternehmen zu fertigende Produktionsmenge ist.
Die Kosten setzen sich zusammen aus den **fixen Kosten** $K_f(x)$ und den **variablen Kosten** $K_v(x)$:

$$K(x) \quad = \quad K_f(x) + K_v(x) \qquad (1)$$

Dabei versteht man unter den Fixkosten die Kosten, die dem Betrieb auch dann entstehen, wenn er im Augenblick kein Gut produziert, z.B. durch Wartung der Maschinen, Zinsen für aufgenommenes Fremdkapital, Miete, Pacht usw.
$K_f(x)$ ist also eine von x unabhängige Funktion. Offensichtlich gilt:

$$K_f(x) \quad = \quad K(0) \qquad (2)$$

Die variablen Kosten hingegen sind von der produzierten Menge x abhängig, z.B. Kosten für Rohmaterial, Löhne, Vertrieb, Transport usw. Es gilt also:

$$K_v(x) \quad = \quad K(x) - K(0) \qquad (3)$$

1 Beispiel

Eine Firma produziert Mehl. Es ergeben sich erfahrungsgemäß folgende Kosten bei 1 t Mehl als Einheit für x und mit der Einheit 100 € bei den Kosten:

x	0	6	20	30	40
$K(x)$	5	10	14	18	30

Es sollen die Kosten für 25 t näherungsweise bestimmt werden.

1.1 Lösung:

Aus der Tabelle erkennen wir, dass $K(0) = 5 = K_f(x)$ die Fixkosten also bei $5 \cdot 100 = 500$€ liegen. Die variablen Kosten für 30 t errechnen sich $K_v(30) = K(30) - K(0) = 18 - 5 = 13$, also bei $13 \cdot 100 = 1300$€ liegen. Die Kostenfunktion selber wird im Intervall $[0; 40]$ näherungsweise durch folgende recht komplizierte Funktion beschrieben:

$$K(x) \quad = \quad -\frac{1}{1142400}x^4 + \frac{2}{1785}x^3 - \frac{16001}{285600}x^2 + \frac{16127}{14288}x + 5$$

Rendtel, 28.02.2012 - 006_ab_kostenfunktion2.tex

Bestätigen Sie, dass an den in der Tabelle gegebenen Stellen x die zugehörigen Werte annimmt.

Aus dem Graphen kann man jetzt zu jeder Produktionsmenge x die zugehörigen Kosten ablesen: So z.B. an der Stelle $x = 15$ den zugehörigen Wert $K(15) \approx 13$ oder $K(35) \approx 22,5$.
Der Verlauf des Graphen ist für die meisten Kostenfunktionen typisch.

Der steile Anstieg der Kosten für kleine Produktionsmengen ist durch die hohen Anfangskosten für die Beschaffung des Rohmaterials, für den Transport und Vertrieb, usw. zu erklären. Für wachsende Mengen x ist der Kostenzuwachs dann zunächst geringer als am Anfang, steigt aber schließlich wieder überproportional an, und zwar dann, wenn man sich der Kapazitätsgrenze des Betriebs nähert. Dann treten erhöhte Einzelkosten durch teure Zusatzleistungen, wie Überstundenzuschläge, Beschäftigung nicht eingelernter Arbeitskräfte, Erhöhung des Ausschusses, usw. ein.

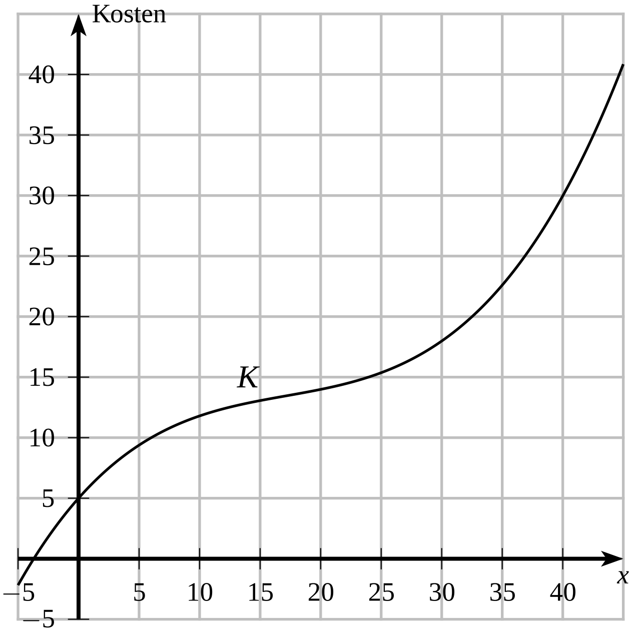

Abb. 1: Kostenfunktion

Natürlich will jede Firma ihr Produkt verkaufen. Die beim Verkauf des Gutes erzielten Gesamteinnahmen heißen **Umsatz** oder **Erlös** U. Entsprechend der Kostenfunktion ist die Zuordnung $x \mapsto U(x)$ eine Funktion, die sogenannte Umsatzfunktion.

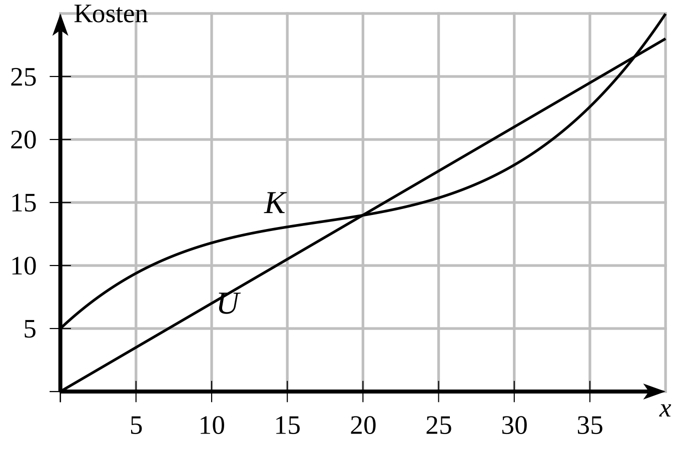

Abb. 2: Umsatzfunktion

Sie hat sicher die Eigenschaft, dass $U(0) = 0$ ist, d.h. sie verläuft durch den Ursprung. Nehmen wir an, dass je Produktionsmenge x der Preis p erzielt wird, so ist $U(x) = p \cdot x$; es ist in diesem Fall der Umsatz eine lineare Funktion. Das nächste Bild zeigt den Graphen von Kosten- und Umsatzfunktion zum obigen Beispiel.

Rendtel, 28.02.2012 - 006_ab_kostenfunktion2.tex

2 Aufgaben

Aufgabe 1: Lesen Sie aus der Zeichnung 2 die Kosten und den Umsatz für die Produktionsmenge $x = 40$, $x = 35$ bzw. $x = 15$ ab. Wie lautet die Umsatzfunktion? Wie groß ist die Differenz und welche Bedeutung hat sie?

Die Differenzfunktion aus Kosten- und Umsatzfunktion heißt **Gewinnfunktion** G:

$$G(x) \quad = \quad U(x) - K(x) \tag{4}$$

In der Zeichnung 3 ist der Graph der Gewinnfunktion des Beispiels dargestellt.

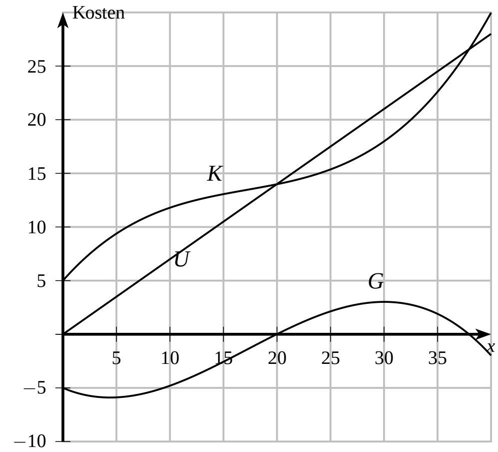

Abb. 3: Differenzfunktion

Aufgabe 2: In welchem Intervall für x erzielt die Firma einen Gewinn? Für welche Produktionsmenge ist der Gewinn etwa am größten?

Durch Bildung des Quotienten $k(x) = \frac{K(x)}{x}$ rechnen wir die Kosten auf die Einheit des produzierten Gutes um, d.h. bilden wir die durchschnittlichen Kosten oder Stückkosten.

Aufgabe 3: Lesen Sie aus dem Schaubild der Kostenfunktion für mehrere Stellen x die Werte $K(x)$ ab, bilden Sie die Stückkosten $k(x) = \frac{K(x)}{x}$ und erstellen Sie dazu ein Schaubild.

Aufgabe 4: Gegeben sei die Kostenfunktion $K(x) = 0,5x^3 - 8,25x^2 + 50,375x + 10$. Sie gibt die Kosten in 1000 € an, die bei der Herstellung von x Wareneinheiten zu je 10000 Stück anfallen.

(a) Bestimmen Sie die Produktionsmenge, bei der die Stückkosten am niedrigsten sind.

(b) Bestimmen Sie die Produktionsmenge, bei der die Grenzkosten am niedrigsten sind.

(c) Bestimmen Sie den Bereich der Produktionsmenge, in dem bei einem Stückpreis von 2,20 € der Ertrag positiv ist.

(d) Bestimmen Sie die Produktionsmenge, für den der Ertrag bei einem Stückpreis von 2,20 € am größten ist.

(e) Bestimmen Sie eine Funktion, die für einen beliebigen Stückpreis p € den maximalen Betrag angibt.

Aufgabe 5: Eine Ware wird zu einem Preis von 60 € pro Wareneinheit verkauft. Die Kosten pro Wareneinheit für Herstellung und Vertrieb beschreibt die Kostenfunktion zu

$$K(x) \quad = \quad \frac{1}{30}x^3 - 2x^2 + 10x + 250$$

Der Gewinn bzw. Verlust beim Verkauf von x Wareneinheiten ist dann $G(x) = 60x - K(x)$. Verlust entsteht, wenn sehr wenige oder sehr viele Wareneinheiten produziert werden.

(a) In welchem Bereich muss die Anzahl der produzierten Wareneinheiten liegen, damit ein Gewinn erzielt wird?

(b) Für welche Produktionsmenge ist der Gewinn maximal?

(c) Für welche Produktionsmenge sind die Stückkosten minimal?

Aufgabe 6: Eine Abteilung produziert Fernseher. Die Kosten können durch die Funktion

$$K(x) \quad = \quad 0,01x^3 - 1,8x^2 + 165x$$

berechnet werden, wobei x die tägliche Stückzahl ist. Die Maximalkapazität beträgt 160 Geräte pro Tag. Verkauft wird das Produkt für 120 € pro Gerät.

(a) Gesucht ist die Gleichung der Gewinnfunktion G.

(b) Zeichnen Sie mithilfe einer Wertetabelle den Graphen von G im Bereich $10 \leq x \leq 160$ mit einer Schrittweite von 20.

(c) Wie viele Geräte müssen produziert werden, um einen Gewinn zu erzielen?

(d) Welches Produktionsniveau maximiert den Gewinn?

(e) Wie groß muss der Verkaufspreis sein, damit bei Vollauslastung kein Verlust entsteht?

Aufgabe 7: Ein Hersteller produziert Fahrräder, welche zu Stückpreis von 120 € verkauft werden. Die täglichen Kosten können durch die Funktion

$$K(x) \quad = \quad 0,02x^3 - 3x^2 + 172x + 2400$$

beschrieben werden, wobei x die Anzahl der täglich produzierten Fahrräder ist. Pro Tag können maximal 130 Fahrräder hergestellt werden.

(a) Die Funktion $U(x)$ beschreibt den täglichen Umsatz, die Funktion $G(x)$ beschreibt den täglichen Gewinn. Stelle die Gleichungen der Umsatz- und Gewinnfunktion auf.

(b) Skizzieren Siw den Graphen von $G(x)$ mithilfe einer Wertetabelle für $0 \leq x \leq 140$. Wähle für die Wertetabelle die Schrittweite 20.

(c) Lesen Sie aus dem Graphen von G ab, welche Tagesstückzahlen zu Gewinnen führen.

(d) Die volle Produktionskapazität von 130 Fahrrädern soll ausgeschöpft werden. Wie hoch ist der Verkaufspreis nun zu wählen, damit keine Verluste entstehen?

Aufgabe 8: Das Bild 4 zeigt den Graphen einer Kostenfunktion K für die Herstellung von Kugelschreibern. x ist in der Mengeneinheit 1000 Stück, $K(x)$ in der Einheit 100 € angegeben.

(a) Lesen Sie aus der Zeichnung ab die Kosten für 10000, 20000, 15000, 30000 Stück.

(b) Wie viel Stück können für 1000 €, 1500 € bzw. 1800 € hergestellt werden? Wie hoch sind die Fixkosten?

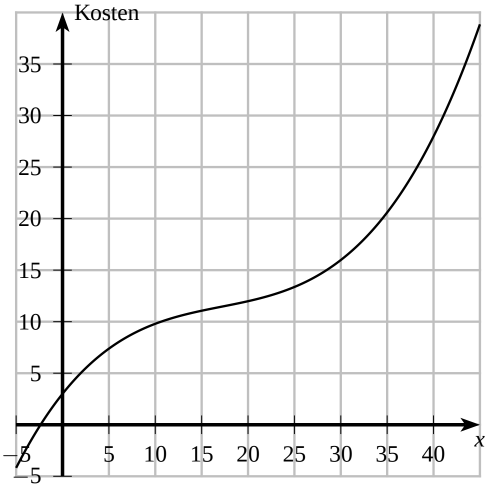

Abb. 4

Kosten und Umsatzfunktionen

Aufgabe 9: Gegeben ist eine lineare Kostenfunktion K und eine lineare Umsatzfunktion U in $[0;20]$ mit

$$K(x) = 0,4x + 15 \quad \text{und} \quad U(x) = 0,7x.$$

(a) Zeichne die zugehörigen Graphen in ein Achsenkreuz.

(b) Ab welcher Produktionsmenge x_0 ist $U(x) \geq K(x)$?

(c) Überlege Dir eine Unterlegung mit realistischen Werten, wo eine derartige Konstellation näherungsweise auftreten könnte.

Aufgabe 10: Gegeben sind Kostenfunktion K und Umsatzfunktion U im Intervall $[0;8]$

$$K(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 \quad \text{und} \quad U(x) = \frac{2}{3}x$$

(a) Zeichne die zu K und U gehörigen Graphen und gib die Fixkosten an.

(b) Lies aus der Zeichnung den Bereich der Produktionsmenge ab, in dem der Umsatz größer ist als die Kosten. Man nennt diesen Bereich *Gewinnzone*. Bestätige das Ergebnis durch Rechnung.

(c) Unterlege Umsatzfunktion und Kostenfunktion mit einigermaßen realistischen Werten für die Produktionsmenge x.

Aufgabe 11: Gegeben ist die Kostenfunktion K im Intervall $[0;8]$

$$K(x) = -\frac{1}{64}x^3 + \frac{7}{32}x^2 + \frac{9}{8}x + 1$$

(a) Erstelle eine Wertetafel für die ganzzahligen x-Werte des Definitionsintervalls $[0;8]$ und fertige anschließend ein Schaubild. Wie hoch sind die Fixkosten?

(b) Je Produktionseinheit wird ein Umsatz von 3 Geldeinheiten erzielt. Zeichne die zugehörige Umsatzfunktion in das Schaubild der Kostenfunktion ein.

(c) Wann ist der Gewinn am höchsten? Ab welcher Produktionsmenge wird ein Gewinn erzielt?

Aufgabe 12: Gegeben sind Kostenfunktion K und Umsatzfunktion U im Intervall $[0:8]$

$$K(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 \quad \text{und} \quad U(x) = \frac{3}{4}x$$

(a) Zeichne die zu K und U gehörigen Graphen und anschließend die zugehörige Gewinnfunktion durch Ordinatensubtraktion.

(b) Lies aus der Zeichnung die Gewinnzone ab. Kannst Du allgemein eine Aussage machen zur Bestimmung der Gewinnzone bei Kenntnis der Gewinnfunktion? Gib anhand des Graphen die Produktionsmenge an bei der ein maximaler Gewinn erzielt wird.

(c) Zeichne die zugehörige Stückkostenfunktion k mit $k(x) = \frac{K(x)}{x}$.

Rendtel, 28.02.2012 - 006_ab_kostenfunktion2.tex