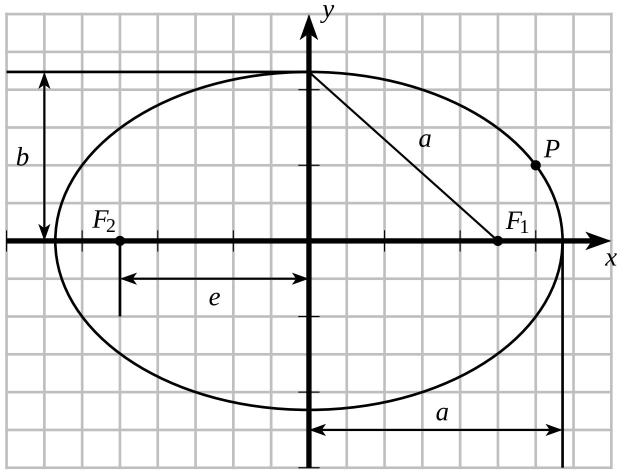
Konstruktion einer Ellipse

Aufgabe 1: Beobachte wie die Ellipse entsteht. Die Konstruktion basiert auf einer möglichen Beschreibung der Eigenschaft aller Punkte auf der Ellipse. Entwickel diese Beschreibung.

Aufgabe 2: Unten siehst Du eine Ellipse mit den wichtigsten Bezeichnungen. F_1 und F_2 sind dabei die Brennpunkte. Versuche herauszufinden, wie die Funktionsgleichung einer (halben) Ellipse lautet.



Vielleicht hilft Dir dabei, dass in vielen Grafik-Programmen die Ellipse aus dem Kreis entsteht, wenn man den Kreis geeignet staucht oder streckt.

Aufgabe 3: Versuche, eine Tangente an die Ellipse zu konstruieren.

V5 - Geometrie

Rendtel, 11.08.2011 - 002_ab_ellipse.tex

Konstruktion einer Ellipse- Lösung

(a) Die Ellipse besteht aus allen Punkten, die von zwei festen Punkten F_1 und F_2 eine konstante Abstandssumme haben (oder so ähnlich).

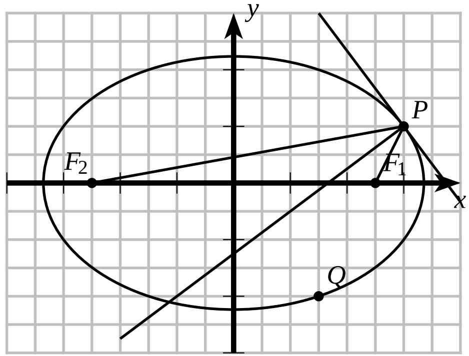
(b) Die Gleichung der Ellipse in Mittelpunktslage lautet $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, analog die Gleichung für die allgemeine achsenparallele Lage.

Nimmt man einen Kreis in Mittelpunktslage mit dem Radius a $(x^2 + y^2 = a^2)$, so entsteht eine Ellipse, wenn man jede y-Koordinate mit dem Faktor a/b multipliziert: $x^2 + (\frac{a}{b}y)^2 = a^2$

(c) Eventuell die Lösung von Lernenden:

(i) Konstruktion der Winkelhalbierenden des Winkels F_2PF_1.

(ii) Konstruktion der Senkrechten dazu im Punkt P ergibt die Tangente.

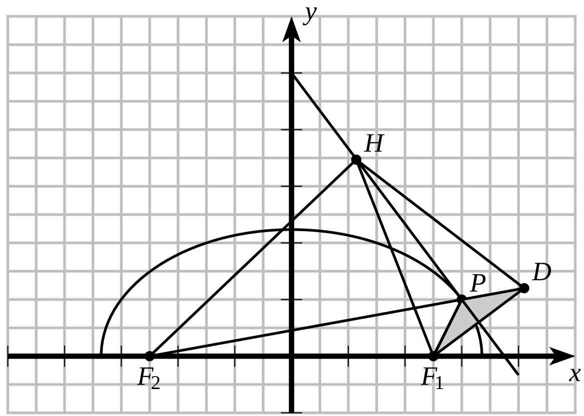


Daraus folgt, dass Strahlen, die den Gesetzmäßigkeiten der Optik folgen, von einem Brennpunkt der Ellipse in den anderen reflektiert werden, worauf einige Anwendungen basieren.

Rendtel, 11.08.2011 - 002_ab_ellipse.tex

Konstruktion einer Ellipse- Lösung

Diese Konstruktion sieht überzeugend aus, ist jedoch kein Beweis, da ja nicht gezeigt ist, dass die scheinbare Tangente genau einen Punkt mit der Ellipse gemeinsam hat. P ist ein Punkt auf der Ellipse. Wir verlängern die Strecke F_2P um eine Strecke der Länge $|PF_1|$ und erhalten so als Endpunkt D. Damit ist das Dreieck F_1PD gleichschenklig. Wir vermuten, dass die Symmetrieachse dieses Dreiecks die Tangente ist. Dazu zeigen wir, dass jeder von P verschiedene Punkt auf dieser Achse, den wir H nennen, nicht auf der Ellipse liegen kann:



Aus Symmetriegründen ist $|HF_1| = |HD|$ und daher $|F_2H| + |HF_1| = |F_2H| + |HD| > |F_2D| = 2a$. Mit der Definition der Ellipse folgt die Behauptung, denn $|F_2P| + |PF_1| = 2a$ und $|F_1D| = 2a$ nach Konstruktion. Die Symmetrieachse ist also Tangente und halbiert den Winkel F_1PD. Dann halbiert die zugehörige Normale den Winkel F_2PF_1, obige Konstruktion ergibt also wirklich Tangente und Normale.

Rendtel, 11.08.2011 - 002_ab_ellipse.tex