Verhalten von ganzrationalen Funktionen und Polynomdivision

Aufgabe 1: Entscheiden Sie, ob f ganzrational ist. Geben Sie ggf. den Grad und die Koeffizienten an.

(a) $f(x) = 1 + \sqrt{2}x$
(b) $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$
(c) $f(x) = (x-1)^2(x-7)$
(d) $f(x) = x^2 - \frac{3}{x}$
(e) $f(x) = x^2 - \frac{x}{3}$
(f) $f(x) = x^2 + \sin(x)$

Aufgabe 2: Untersuchen Sie das Verhalten für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$

(a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$
(b) $f(x) = -3x^4 + 3x^3 - x + 1$
(c) $f(x) = 3x - x^3$
(d) $f(x) = -2x^4 + 0,5x^2$
(e) $f(x) = x^3(1 - x^2)$
(f) $f(x) = (1-2x)(2+5x^2)$
(g) $f(x) = x(1-2x)^2$
(h) $f(x) = (x + 2x^3)(x^2 - 1)$
(i) $f(x) = (2x-1)^3 + 4$

Aufgabe 3: Welche ganzrationale Funktion hat einen zur $y-$Achse (zum Ursprung) symmetrischen Graphen? Skizzieren Sie den Graphen für (a) bis (e).

(a) $f(x) = x$
(b) $f(x) = x^2$
(c) $f(x) = x^3$
(d) $f(x) = x^4$
(e) $f(x) = 2x + 3$
(f) $f(x) = 7 - x^4 + 2x^6$
(g) $f(x) = 4x^3 + 1$
(h) $f(x) = \frac{1}{6}x^6 - x^2 - \sqrt{2} + 1$
(i) $f(x) = x^3(x+1)(x-1)$

Aufgabe 4: Welche Funktion hat einen zur $y-$Achse (zum Ursprung) symmetrischen Graphen? Skizzieren Sie den Graphen für (a) bis (d).

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$
(b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$
(c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$
(d) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
(e) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
(f) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
(g) $f(x) = x\sqrt{x^2+2}$
(h) $f(x) = \frac{1}{2}(2^x + 2^{-x})$
(i) $f(x) = |x|$

Bitte wenden...

Rendtel, 19.08.2011 - 002_ab_aufgaben_zu_ganzrational.tex

Beispiel zur Polynomdivision

Es sei die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ gegeben. Man rät zunächst eine Nullstelle der Funktion f, indem man sich die Konstante $+24$ anschaut und Teiler dieser Zahl ausprobiert:

x	-1	0	1	2	3	4	6	8
$f(x)$	30	24	12	0	-6	0	72	264

Wir haben so bereits zwei Nullstellen erraten und führen nun eine Polynomdivision mit der Nullstelle $x = 2$ durch:

$$\begin{array}{l}
\left(x^3 - 3x^2 - 10x + 24\right) : \left(x - 2\right) = x^2 - x - 12 \\
\underline{-x^3 + 2x^2} \\
\quad -x^2 - 10x \\
\quad \underline{x^2 - 2x} \\
\qquad -12x + 24 \\
\qquad \underline{12x - 24} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Die weiteren Nullstellen erhält man, indem man die $pq-$Formel auf den Term $x^2 - x - 12$ anwendet. Die Nullstellen der Funktion f sind $(-3|0)$, $(2|0)$ und $(4|0)$.

Aufgabe 1: Im Folgenden sind jeweils Polynome und eine Nullstelle des Polynoms angegeben. Führen Sie jeweils eine Polynomdivision durch.

(a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$, $x = -3$.
(b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, $x = 3$
(c) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$, $x = -1$
(d) $f(x) = x^3 - 7x^2 - 4x + 28$, $x = 7$
(e) $f(x) = x^3 + 7x^2 - 4x - 28$, $x = -7$
(f) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $x = 0$
(g) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 100x + 200$, $x = 2$
(h) $f(x) = x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x$, $x = -5$
(i) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8$, $x = -4$
(j) $f(x) = x^2 + 2x - 8$, $x = -4$

Aufgabe 2: Im folgenden sind Polynome des Grades 3 und jeweils eine Nullstelle angegeben. Führen Sie eine Polynomdivision durch. Geben Sie anschließend alle Nullstellen des Polynoms an.

(a) $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, $x = 1$
(b) $f(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$, $x = -1$
(c) $f(x) = x^3 - x$, $x = 0$
(d) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 16x - 32$, $x = -2$

★ ★

Lösungen

1. a) $x^2 - x$ b) $x^2 - x$ c) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ d) $x^2 - 4$ e) $x^2 - 4$ f) $x^2 - 3x + 2$ g) $x^2 - 100$ h) $x^3 - x$ i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ j) $x - 2$

2. a) Polynomdivision liefert $x^2 - 4$. Nullstellen: $x = 1$, $x = 2$ und $x = -2$.
b) Polynomdivision liefert $x^2 - 9$. Nullstellen: $x = -1$, $x = 3$ und $x = -3$.
c) Polynomdivision liefert $x^2 - 1$. Nullstellen: $x = 0$, $x = 1$ und $x = -1$.
d) Polynomdivision liefert $x^2 - 16$. Nullstellen: $x = -2$, $x = 4$ und $x = -4$.

Rendtel, 19.08.2011 - 002_ab_aufgaben_zu_ganzrational.tex